



---

---

# I Uvod

## A. Fizičke veličine i jedinice

Fizičke veličine se izražavaju *brojem* i *jedinicom*. Jedinica za neku veličinu  $x$  se označava sa  $[x]$ . Broj bez jedinice je besmislen, i rezultat izražen na taj način je neupotrebljiv; ovo predstavlja čestu grešku na ispitima i kolokvijumima koja se ne prašta. Treba razvijati naviku neprestanog pisanja jedinica u toku izrade zadatka. U početku to studentima predstavlja teškoću, ali se navika brzo stiče (a sa njom i poeni).

Od 1980. godine u Jugoslaviji je na snazi SI sistem jedinica, i rezultati zadataka moraju biti izraženi isključivo u ovom sistemu jedinica, jer je on jedini koji je dozvoljeno koristiti u inženjerskoj praksi.

### Svođenje izvedenih na osnovne jedinice SI

U zadacima sa ovom temom potrebno je izvedene jedinice SI izraziti preko osnovnih jedinica SI sistema, a to su: metar (m), sekund (s), kilogram (kg), amper (A), kelvin (K), mol i kandela (cd). Za izražavanje izvedenih jedinica preko osnovnih potrebno je poznavati jednačine za veličinu koju izražavamo izvedenom jedinicom, i osnovna pravila stepenovanja iz matematike:

$$x^{-a} = 1/x^a \quad x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad (xy)^a = x^a \cdot y^a \quad (x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

Rešeni zadaci:

1. Jedinicu za silu izraziti preko osnovnih jedinica SI.

Rešenje:

Jedinica za silu SI je njutn (oznaka N). Jedna od jednačina za silu (oznaka F) je drugi Njutnov zakon:  $F = m \cdot a$ . Jedinica za masu (m) je kilogram, i to je osnovna jedinica SI, a jedinica za ubrzanje (a) u SI je  $m/s^2 = m \cdot s^{-2}$ , i izražena je preko osnovnih jedinica SI metra i sekunde. Prema prethodnom je  $N = [F] = [m \cdot a] = [m] \cdot [a] = kg \cdot m \cdot s^{-2}$ .

2. Jedinicu za rad izraziti preko osnovnih jedinica SI.

Rešenje:

Jedinica za rad u SI je džul (oznaka J). Jedna od jednačina za rad (oznaka A) je jednačina za rad sile (F) duž nekog puta (s):  $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$ . Jedinica za silu je njutn, i prema prethodnom

---

---

zadatku  $N = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Jedinica za pređeni put je metar (m), pa je  $J = [A] = [F] \cdot [s] = N \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ .

Zadaci za samostalnu vežbu:

3. Jedinicu za snagu izraziti preko osnovnih jedinica SI.

Rešenje:  $W = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$

4. Jedinicu za pritisak izraziti preko osnovnih jedinica SI.

Rešenje:  $\text{Pa} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

Dimenziona analiza

Dimenzije (jedinice) leve i desne strane jednačine moraju biti jednake. Zadatak dimenzione analize je da se na osnovu ove činjenice izvedu određeni zaključci. Tipični zadaci dimenzione analize su provera ispravnosti neke jednačine i određivanje jedinica fizičkih veličina.

Rešeni zadaci:

5. Da li je moguće da formula za neki vremenski period glasi  $T = \pi \cdot \sqrt{l/a}$  gde je sa l označena neka dužina, a sa a neko ubrzanje ?

Rešenje:

Jedinica za veličinu sa leve strane jednačine je  $[T] = \text{s}$ . Jedinica desne strane jednačine je  $[\pi \cdot \sqrt{l/a}] = [\pi] \cdot [\sqrt{l/a}]$ ; matematičke konstante ( $\pi, e, \dots$ ) su neimenovani brojevi, i imaju dimenziju 1, pa je  $[\pi] = 1$ , dok je  $[\sqrt{l/a}] = [(l/a)^{1/2}] = [l^{1/2} \cdot a^{-1/2}] = \text{m}^{1/2} \cdot (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})^{-1/2} = \text{m}^{1/2} \cdot \text{m}^{-1/2} \cdot \text{s} = \text{s}$  pa i leva i desna strane jednačine imaju iste jedinice, te je sa te strane formula moguća.

6. Odrediti dimenziju (prirodu, jedinice) veličine h u barometarskoj jednačini koja glasi:  $p = p_0 \cdot e^{-M \cdot g \cdot h / R \cdot T}$ , gde je sa M označena molarna masa, sa g ubrzanje Zemljine teže, sa R univerzalna gasna konstanta čija je jedinica J/K, a sa T temperatura.

Rešenje:

Argumenti transcendentnih funkcija, (trigonometrijske, eksponencijalna, logaritamska, ...) moraju imati bezdimenzione veličine, pa mora biti  $[M \cdot g \cdot h / R \cdot T] = 1$ , odnosno mora biti  $[h] = [RT/Mg] = [R] \cdot [T] / [M] \cdot [g] = (\text{J/K}) \cdot \text{K} / \text{kg} \cdot (\text{m/s}^2) = \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{K} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^2 = \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^2$ . Kako je pokazano u zadatku 2,  $\text{J} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ . Prema tome  $[h] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^2 = \text{m}$ , pa je h po prirodi dužina.

---

---

Zadaci za samostalnu vežbu:

7. Primenom dimenzione analize odrediti da li jednačina za centralnu silu može da glasi  $F = m \cdot \omega^2 \cdot r$  ili  $F = m \cdot \omega^2 / r$ , gde je sa  $m$  označena masa, sa  $\omega$  ugaona brzina, a sa  $r$  poluprečnik rotacije.

Rešenje: (Ispravan je oblik  $F = m \cdot \omega^2 \cdot r$ )

8. Odrediti jedinicu koeficijenta viskoznosti ( $\eta$ ) primenom jednačine za viskoznu silu

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

u kojoj je sa  $F$  označena viskozna sila, sa  $S$  kontaktna površina, sa  $\Delta v$  priraštaj brzine, a sa  $\Delta x$  debljina sloja tečnosti.

Rešenje: ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ )

Izražavanje jedinica SI veličina datih u jedinicama van SI

U praksi se još uvek mogu pronaći podaci koji su izraženi u jedinicama van SI i zato je potrebno znati način na koji se ti podaci mogu izraziti u SI.

Rešeni zadaci:

9. Izraziti jedinicu za ugao lučni stepen u SI.

Rešenje:

$$180^0 = \pi \text{ rad} \Rightarrow 1^0 = \pi / 180 \text{ rad}$$

10. Izraziti jedinice za zapreminu litar ( $1\text{l} = 1 \text{ dm}^3$ ) i kubni centimetar u jedinicama SI.

Rešenje:

$$1\text{l} = 1 \text{ dm}^3 = 1 \cdot (10^{-1} \text{ m})^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$1 \text{ cm}^3 = 1 \cdot (10^{-2} \text{ m})^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$$

11. Jedinicu za gustinu  $\text{g/cm}^3$  izraziti u jedinicama SI.

Rešenje:

$$1 \text{ g/cm}^3 = 1 \cdot (10^{-3} \text{ kg}) / (10^{-2} \text{ m})^3 = 10^{-3} / 10^{-6} \text{ kg/m}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

12. Jedinicu za brzinu  $\text{km/h}$  (kilometar na čas) izraziti u jedinicama SI.

Rešenje:

$$1 \text{ km/h} = 1 \cdot (10^3 \text{ m} / 3600 \text{ s}) = 1/3,6 \text{ m/s} \approx 0,278 \text{ m/s}$$

---

---

13. Jedinicu za ugaonu brzinu ob/min (obrtađ u minuti) izraziti u SI.

Rešenje:

Jedan obrtađ = pun ugao =  $2\pi$  rad, pa je  $1 \text{ ob/min} = (2\pi \text{ rad})/(60 \text{ s}) = \pi/30 \text{ rad/s}$ .

14. Jedinice za energiju eV (elektronvolt) i kWh (kilovatčas) izraziti u SI.

Rešenje:

$1 \text{ eV} = (\text{elementarno naelektrisanje}) \cdot 1 \text{ V} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

$1 \text{ kWh} = 10^3 \cdot 1 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$

Zadaci za samostalnu veđbu:

15. Preračunati u jedinice SI: a)  $36^0$  b) 72 km/h c) 240 ob/min d) 2 kWh

Rešenje: ( $\pi/5$  rad, 20 m/s,  $8 \cdot \pi$  rad/s, 7,2 MJ)

16. Pritisak od 200 N/mm<sup>2</sup> izraziti u SI.

Rešenje: (2 MPa)

### Izražavanje rezultata merenja

U fizici i tehničari nije moguće poznavati tačnu brojnu vrednost veličine koju opisujemo, jer su sva merenja ograničena tačnošću mernih instrumenata i promenljivošću uslova merenja. Stoga se svaka fizička veličina (označimo je sa  $x$ ) koja se opisuje brojem predstavlja pomoću srednje vrednosti (oznaka  $\bar{x}$ ) i ocene apsolutne greške ( $\Delta x$ ) (*jedinice  $\Delta x$  su iste kao i jedinice  $x$* ):

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x).$$

Relativna greška je odnos apsolutne greške i srednje vrednosti:  $\delta x = \Delta x / \bar{x}$  ( *$\delta x$  je bezdimenziona veličina*).

Pri računanju sa približnim vrednostima fizičkih veličina koristimo se sledećim pravilima

1) Apsolutna greška zbira ili razlike dve veličine jednaka je zbiru apsolutnih grešaka članova:

$$S = x+y \text{ ili } S = x-y \Rightarrow \Delta S = \Delta x + \Delta y$$

2) Relativna greška proizvoda ili količnika dve veličine jednaka je zbiru relativnih grešaka članova:

$$S = x \cdot y \text{ ili } S = x/y \Rightarrow \delta S = \delta x + \delta y$$

3) Relativna greška n-tog stepena neke fizičke veličine jednaka je proizvodu stepena i relativne greške te veličine:

$$S = x^n \Rightarrow \delta S = n \cdot \delta x$$

---

---

Pri izražavanju dobijenih rezultata primenjuje se sledeći postupak:

- 1) Izračunata apsolutna greška se izrazi u obliku  $\Delta x = r \cdot 10^n$  tako da je  $1 < r < 10$  a zatim apsolutna greška *ocenjuje* tako što se izračunata vrednost *poveća* tako da bude izražena *samo jednom* značajnom cifrom  $\Delta x \approx m \cdot 10^n$ , tako da je  $m$  prvi ceo broj veći od  $r$ . Izuzetak predstavlja slučaj kada je  $1 < r < 1.5$ , i u tom slučaju je  $m = 1.5$
- 2) Izračunata srednja vrednost se *zaokrugli* na mestu koje odgovara  $10^n$  po pravilima zaokrugljivanja na *bližu* vrednost.

Rešeni zadaci:

17. Na osnovu rezultata merenja stranica paralelograma  $a = (10,0 \pm 0,1)$  cm i  $b = (4,0 \pm 0,1)$  cm izračunati njegovu površinu.

Rešenje:

Prvi deo izrade svakog zadatka je izražavanje zadatih veličina jedinicama SI sistema, pa je  $\bar{a} = 10 \cdot 10^{-2}$  m =  $10^{-1}$  m,  $\Delta a = 0.1 \cdot 10^{-2}$  m =  $10^{-3}$  m, dok je  $\bar{b} = 4 \cdot 10^{-2}$  m i  $\Delta b = 0.1 \cdot 10^{-2}$  m =  $10^{-3}$  m.

Površina paralelograma određuje se po obrascu  $P = a \cdot b$ , pa je srednja vrednost  $\bar{P} = \bar{a} \cdot \bar{b} = 10^{-1} \text{ m} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ . Prema pravilima za računanje sa približnim vrednostima možemo odrediti relativnu grešku određivanja površine  $\delta P = \delta a + \delta b$ . Relativne greške merenja dužina stranica su  $\delta a = \Delta a / a = 10^{-3} \text{ m} / 10^{-1} \text{ m} = 0,01$  i  $\delta b = 10^{-3} / 4 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 0,025$ , pa je  $\delta P = 0,035$ . Apsolutnu grešku određivanja površine određujemo prema obrascu  $\Delta P = P \cdot \delta P = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ . Ovu vrednost ocenjujemo sa  $\Delta P \approx 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ . Pošto se izračunata vrednost površine može napisati u obliku  $P = 40,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ , nema potrebe za zaokrugljivanjem pa je veličinu merene površine izražavamo sa:

$$P = (40,0 \pm 1,5) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

*Napomena:* U žargonu se zahtev da srednja vrednost bude zaokrugljena na istom decimalnom mestu kao i greška kaže da "broj decimala srednje vrednosti treba da je jednak broju decimala greške". Iako ne sasvim tačan, ovaj stav vizuelno se lako pamti i uspešno primenjuje. To je i razlog zašto smo za srednju vrednost površine usvojili  $40,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$  a ne  $40 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ . Iako matematički jednaki, ova dva izraza u tehnici izražavaju različite tačnosti merenja i izračunavanja.

18. Izračunati površinu trapeza čije ako su merenjem određene dužine osnovica  $a = (10,0 \pm 0,1)$  cm i  $b = (4,0 \pm 0,1)$  cm i visina  $h = (5,0 \pm 0,1)$  cm.

Rešenje:

Prema postavci zadatka:  $\bar{a} = 10^{-1}$  m,  $\Delta a = 10^{-3}$  m;  $\bar{b} = 4 \cdot 10^{-2}$  m,  $\Delta b = 10^{-3}$  m;  $\bar{h} = 5 \cdot 10^{-2}$  m,  $\Delta h = 10^{-3}$  m

Formula za površinu trapeza glasi  $P = (a+b) \cdot h / 2$ . Prema tome je  $\bar{P} = (\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{h} / 2 = 3,5 \cdot 10^{-3}$  m<sup>2</sup>. Izraz za površinu trapeza sadrži i sabiranje i množenje, pa je određivanje greške složenije: u osnovi se on može predstaviti pomoću množenja veličine  $(a+b)$  i veličine  $h$  i deljenja sa 2. Prema pravilima za računanje sa približnim vrednostima tada je  $\delta P = \delta(a+b) + \delta h + \delta 2$ . Greške matematičkih konstanti su jednake nuli jer njih tačno poznajemo, pa je  $\delta 2 = 0$ . Za vrednost  $\delta h$  imamo prema definiciji relativne greške  $\delta h = \Delta h / \bar{h} = 0,02$ . Problem predstavlja određivanje relativne greške zbira  $(a+b)$  jer ne postoji jednostavna formula za to; karakteristična greška studenata je "izmišljanje" formule  $\delta(a+b) = \delta a + \delta b$  koja **ne važi**; rezultat te "formule" je 0 poena na zadatku ili padanje na izlaznom kolokvijumu vežbi. Pravi postupak je korišćenje definicije  $\delta(a+b) = \Delta(a+b) / (\bar{a} + \bar{b})$  i primena pravila računanja sa približnim vrednostima  $\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$ ; na taj način je  $\Delta(a+b) = 2 \cdot 10^{-3}$  m, a  $\delta(a+b) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} / 14 \cdot 10^{-2} \text{ m} \approx 0,014$  (zaokrugljivanja vršimo na četiri značajne cifre, jer rezultate iskazujemo sa tri). Dakle važi da je  $\delta P = 0,02 + 0,014 = 0,034$ , a odatle je  $\Delta P = \bar{P} \cdot \delta P \approx 0,12 \cdot 10^{-3}$  m<sup>2</sup>. Ovu vrednost greške ocenjujemo povećavanjem na  $\Delta P \approx 0,15 \cdot 10^{-3}$  m<sup>2</sup>. Rezultat izračunavanja površine zapisujemo kao

$$P = (3,50 \pm 0,15) \cdot 10^{-3} \text{ m}^2.$$

19. Odrediti gustinu materijala od koga je načinjen valjak visine  $h = (10,0 \pm 0,1)$  cm i poluprečnika  $r = (5,0 \pm 0,1)$  cm, ako je merenjem utvrđeno da je njegova masa  $m = (8,000 \pm 0,005)$  kg.

Rešenje:

Prema postavci zadatka je  $\bar{h} = 0,1$  m,  $\Delta h = 10^{-3}$  m;  $\bar{r} = 0,05$  m,  $\Delta r = 10^{-3}$  m,  $\bar{m} = 8,000$  kg,  $\Delta m = 5 \cdot 10^{-3}$  kg.

Budući da formula za gustinu materijala ( $\rho$ ) glasi  $\rho = m/V$ , a da se zapremina valjka može odrediti prema formuli  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ , za određivanje gustine u ovom slučaju se dobija formula  $\rho = m / (\pi \cdot r^2 \cdot h)$ . Jednačine ovog oblika (proizvodi, stepeni i količnici merenih veličina) su najčešće zastupljene na laboratorijskim vežbama iz fizike. Jednačinu za određivanje greške je u ovom slučaju jednostavno napisati jer ukupna relativna greška predstavlja prosto zbir svih relativnih grešaka veličina koje učestvuju u formuli vodeći računa da je greška pri stepenovanju jednaka  $\delta(x^n) = n \cdot \delta(x)$  (jer je npr.  $x^2 = x \cdot x$  pa je greška proizvoda  $\delta(x^2) = \delta(x \cdot x) = \delta x + \delta x = 2 \cdot \delta x$ ).

Zato je u ovom slučaju  $\delta\rho = \delta m + \delta\pi + 2\cdot\delta r + \delta h$ . Budući da je  $\pi$  matematička konstanta  $\delta\pi = 0$ ; po definiciji relativne greške  $\delta m = \Delta m / \bar{m} = 6,25 \cdot 10^{-4}$ ,  $\delta r = \Delta r / \bar{r} = 0,02$ ,  $\delta h = \Delta h / \bar{h} = 0,01$ , pa je  $\delta\rho = 0,050625$ ; primećuje se da je greška određivanja mase  $\delta m$  mnogo manja nego greška određivanja dužina, pa praktično ne utiče na ukupnu grešku merenja. Kako je  $\bar{\rho} = \bar{m} / (\pi \cdot \bar{r}^2 \cdot \bar{h}) \approx 10120 \text{ kg/m}^3$ , apsolutna greška određivanja gustine je  $\delta\rho = \rho \cdot \Delta\rho \approx 515,7 \text{ kg/m}^3 = 5,157 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$  što se ocenjuje sa  $\delta\rho \approx 6 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$  (**Obratiti pažnju: pri ocenjivanju se greška ne zaokrugljuje na bližu vrednost  $5 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$  već se povećava na  $6 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$  jer je takvo pravilo za ocenjivanje greške, videti pravilo 1 na strani 5. Na ovom mestu studenti greše vršeći zaokrugljivanje greške umesto povećavanja !!!**). Zaokrugljujući srednju vrednost na istom decimalnom mestu imamo da je  $\bar{\rho} = 10120 \text{ kg/m}^3 = 101,20 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3 \approx 101 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$ , odnosno

$$\rho = (101 \pm 6) \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3.$$

Zadaci za samostalnu vežbu:

20. Odrediti poluprečnik lopte ako je merenjem određeno da njena zapremina iznosi  $V = (125 \pm 1) \text{ cm}^3$ .

Rešenje:  $r = (3,102 \pm 0,008) \cdot 10^{-2} \text{ m}$

21. Odrediti površinu ploče koja je izrađena tako što je u pravougaone ploče stranica  $a = (21,2 \pm 0,1) \text{ cm}$  i  $b = (12,1 \pm 0,1) \text{ cm}$  izrezan kružni otvor poluprečnika  $r = (7,0 \pm 0,1) \text{ cm}$ .

Rešenje:  $P = (103 \pm 8) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

22. Odrediti modul torzije žice na osnovu formule  $G = (2 \cdot l \cdot c) / (\pi \cdot r^4)$  ako je izmereno:  $l = (522 \pm 1) \text{ mm}$ ,  $r = (0,51 \pm 0,02) \text{ mm}$  i izračunavanjem određeno  $c = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ Nm/rad}$  sa relativnom greškom  $\delta c = 2\%$ .

Rešenje:  $G = (29 \pm 6) \text{ GPa}$